ثانوية أحمد مربوح
سيدي الجيلالي

السنة الدراسية 2007-2008
المستوى: 3 علوم تجريبية
المدة : 3 ساعات

امتحان الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (5 نقط)

نعتبر الدّالة العددية f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbf{R}$. نرمز إلى مشتقة الدالة f بـ : f' . الجدول في الأسفل يمثّل تغيرات الدالة f على $\mathbf{R}$. ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

عين الإجابات الصحيحة في كل حالة من الحالات التالية: (برّر الإجابتين 4 و 5)

1- أ- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ب- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ جـ - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

2- المنحنى (C) يقبل كمستقيم مقارب , المستقيم الذي معادلته :

أ- $x=0$ ب- $x=2$ جـ $y=0$

3- في المجموعة $\mathbf{R}$ المعادلة $f(x)=0$ تقبل :

أ- حل واحد ب- حلين مختلفين جـ ثلاث حلول مختلفة

4-نعتبر في المجموعة $\mathbf{R}$ المتراجحة $f(x)\geq -1$ و لتكن S مجموعة حلولها

أ- $S=\square$ ب- $S=]2,+\infty[$ جـ $S=]-\infty,-2]$

5 - لتكن الدالة g بحيث : $g(x)=e^{f(x)}$ من أجل كل عدد حقيقي x . على المجال $]-\infty,2]$ الدالة g :

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما جـ لها نفس اتجاه تغير الدالة f

التمرين الثاني: (5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- حل في $\square$ المعادلة : $z^2-(2+i)z+3+i=0$ نرمز للحلين بـ : z_0 , z_1 حيث : $|z_0|>|z_1|$

2-لتكن النقط A , B , C من المستوي صور الأعداد : 1, z_0 , z_1 على الترتيب . أوجد إحداثيتي النقطة G مركز المسافات المتساوية للنقط A , B , C

3 – T التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

أ– بين أن : $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$

ب– استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة . أكتب عبارته المركبة

ج– لتكن النقط A' , B' , C' من المستوي صور النقط A , B , C على الترتيب بالتحويل T .

بين أنّ النقط A', B', C' في استقامية .

التمرين الثالث(**10** نقط) : المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ وحدة الطول تساوي: **1**سم

الجزء الأول:

I– نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]1,+\infty[$ بحيث : $g\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+1}$ و ليكن $\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1– أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)$

2– أدرس تغيرات الدالة g على $]1,+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

3– استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$: $\mathbf{0} < g\left(x\right) < \mathbf{1}$ ......(1) (لاحظ جدول التغيرات)

4 – أكتب معادلة للمماس $\left(T\right)$ للمنحنى $\left(C_g\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة **1**. أرسم $\left(T\right)$ و المنحنى $\left(C_g\right)$

II– نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]1,+\infty[$ بحيث : $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1– أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f\left(x\right)$. فسر النتائج بيانيا

2– لاحظ أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$: $f\left(x\right)=g\left(x\right)+\ln\left(g\left(x\right)\right)$

أ– بين أنّ الدالة f تقبل اشتقاق على $]1,+\infty[$ ثمّ بين بالحساب أنّ : $f'\left(x\right)=\dfrac{4x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2}$

ب– أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]1,+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها

3– بين أنّ المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حل وحيد x_0 حيث $3.5<x_0<3.7$. استنتج قيمة تقريبية للعدد x_0

الجزء الثاني:

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,+\infty[$ نضع : $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$

1– باستعمال الحصر (1) في الجزء الأول عين إشارة $h\left(x\right)$ على المجال $]1,+\infty[$ ثمّ استنتج وضعية المنحنى $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمنحنى $\left(C_g\right)$

2– أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h\left(x\right)$ كيف تفسر بيانيا هذه النتيجة ؟

3– أرسم $\left(C_f\right)$ في نفس المعلم

4– لتكن **A** نقطة تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع حامل محور الفواصل و لتكن **B** نقطة تقاطع $\left(C_g\right)$ مع حامل محور الفواصل

لتكن **C** نقطة من المنحنى $\left(C_g\right)$ فاصلتها x_C حيث $0<x_C\leq x_0$

أ– بين أنّ مساحة المثلث **ABC** تساوي : $\dfrac{1}{2}\left(x_0-1\right)g\left(x_C\right)$

ب– عيّن x_C حتّى تكون مساحة المثلث **ABC** أكبر ما يمكن .

مع تحيات الأستاذ :

مهاجــر لطفي

تذكير : مساحة مثلث تساوي نصف جداء طول القاعدة و الارتفاع

التمرين	الإجابة النموذجية 3 علوم تجريبية .	التنقيط
التمرين الأول (05ن)	1- الإجابة الصحيحة هي : جـ : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$	0,75
	2- الإجابة الصحيحة هي : جـ	0,5
	3- الإجابة الصحيحة هي : ب	0,75
	4- الإجابة الصحيحة هي: أ . التبرير: لأن -1 قيمة حدية صغرى على IR للدالة f	2×0,75
	5- الإجابة الصحيحة هي: جـ لأن: $g(x)=f(x)e^{f(x)}$ أي أن إشارة $g(x)$ هي نفسها إشارة $f(x)$	2×0,75
التمرين الثاني (05 ن)	1- حل المعادلة : المميز : $\Delta=-9$	0,25
	الحلول : $z_0=1+2i$ ، $z_1=1-i$	0,75
	2- إحداثيات مركز المسافات المتساوية G:	
	لتكن z_G لاحقة G إذن : $z_G=\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)$	
	$=1+\frac{1}{3}i$	01
	إذن $G(1, \frac{1}{3})$.	
	3- أ * باستعمال علاقة شال في الأشعة (إدخال النقطة G)	
	نتحصل إثبات أن: $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$	0,5
	ب * طبيعة التحويل T: T هو تحاكي مركزه G و نسبته -2	0,5
	عبارته المركبة : $z'=-2z+3+i$	01
	جـ * إثبات أن النقط A' ، B' ، C' في إستقامية :	
	هناك عدة طرق لإثبات ذلك . (نقبل أي طريقة صحيحة) .	
	يكفي إثبات أن $\overrightarrow{A'B'} // \overrightarrow{A'C'}$ وهذا معناه إثبات وجود عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{A'C'}$ معناه:	
	$z_{B'}-z_{A'}=k(z_{C'}-z_{A'})$	01,5
	أي أن : $\frac{z_{B'}-z_{A'}}{z_{C'}-z_{A'}}=k$	
	ولكن : $z_{B'}-z_{A'}=-2(z_B-z_A)$	
	$z_{C'}-z_{A'}=-2(z_C-z_A)$	
	وبالتالي يكفي إثبات أن الحد $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ هو عدد حقيقي وهذا صحيح بالحساب	

التنقيط	الإجابة النموذجية	التمرين

التمرين الثالث (05 ن).

الجزء الأول : (06,25 ن) .

*I *1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ 0,25

*2 دراسة إتجاه التغير : $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. $g'(x) > 0$ وبالتالي

g متزايدة تماما على $[1,+\infty[$ 0,75

جدول التغيرات :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow 1$

*3 الإستنتاج : الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,+\infty[$ وبالتالي

على $]1,+\infty[$ ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ و $g(1) = 0$ إذن 0,5

إذا كان $x > 1$ فإن : $0 < g(x) < 1$. (وهذا واضح على جدول التغيرات) .

*4 معادلة المماس (T) هي : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 0,25

*5 رسم المنحنى : أنظر الشكل أسفله 0,75

*II 1 : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ 2x0,5

التفسير البياني : المنحنى (C) يقبل المستقيمان ذوا المعادلتين : 0,5

$y = 1$ و $x = 1$ كمستقيمين مقاربين .

*2 الدالة f قابلة للإشتقاق على $]1,+\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع

دالتين قابلتين للإشتقاق هما : $x \mapsto g(x)$ و $x \mapsto \ln(g(x))$ 0,5

على $]1,+\infty[$ والدالة الأخيرة قابلة للإشتقاق لأنها مركب دالتين

قابلتين للإشتقاق هما g و $x \mapsto \ln x$ على المجال $]1,+\infty[$.

* بالحساب ينتج : $f'(x) = g'(x) + \frac{g'(x)}{g(x)}$

$= \frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}$. 0,5

*3 إتجاه التغير : $f'(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]1,+\infty[$ 0,5

وبالتالي فالدالة f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$

التنقيط	الإجابة النموذجية	التمرين

تابع التمرين الثالث .

جدول التغيرات :

0,25

x	1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0 ↗	1

*4 إثبات وجود الحل x_0 : الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على $]3{,}5\ ;\ 3{,}7[$

وبما أن : $f(3{,}5) = -0{,}09$ و $f(3{,}7) \simeq 0{,}02$ فإن :

$$f(3{,}5) < 0 < f(3{,}7)$$

0,75 إذن حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد x_0 وحيد

بحيث $3{,}5 < x_0 < 3{,}7$ و $f(x_0) = 0$.

0,25 القيمة التقريبية لـ x_0 : $x_0 \simeq \frac{3{,}5 + 3{,}7}{2} \simeq 3{,}6$

الجزء الثاني :

*1 إشارة $h(x)$: لدينا : $h(x) = \ln(g(x))$ وبما أن $0 < g(x) < 1$

0,5 حسب الحصر (1) في الجزء الأول فإن $h(x) < 0$ من أجل كل عدد

حقيقي x من المجال $]1, +\infty[$.

0,25 إذن المنحنى (C_h) يقع أسفل المنحنى (C_g) ......

2 x 0,5 *2 $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ وتفسر هذه النتيجة بأن المنحنى (C_h) يقارب

المنحنى (C_g) بجوار $(+\infty)$.

0,75 *3 رسم المنحنى : أنظر الشكل أسفله . ...

*4 أ- مساحة المثلث ABC : تساوي نصف جداء طولي القاعدة

0,5 والإرتفاع . طول القاعدة $[AB]$ يساوي $x_c - 1$ وطول

الإرتفاع يساوي $g(x_c)$ وبالتالي : $S = \frac{1}{2}(x_c - 1)\, g(x_c)$.

ب- تعيين x_c حتى تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن :

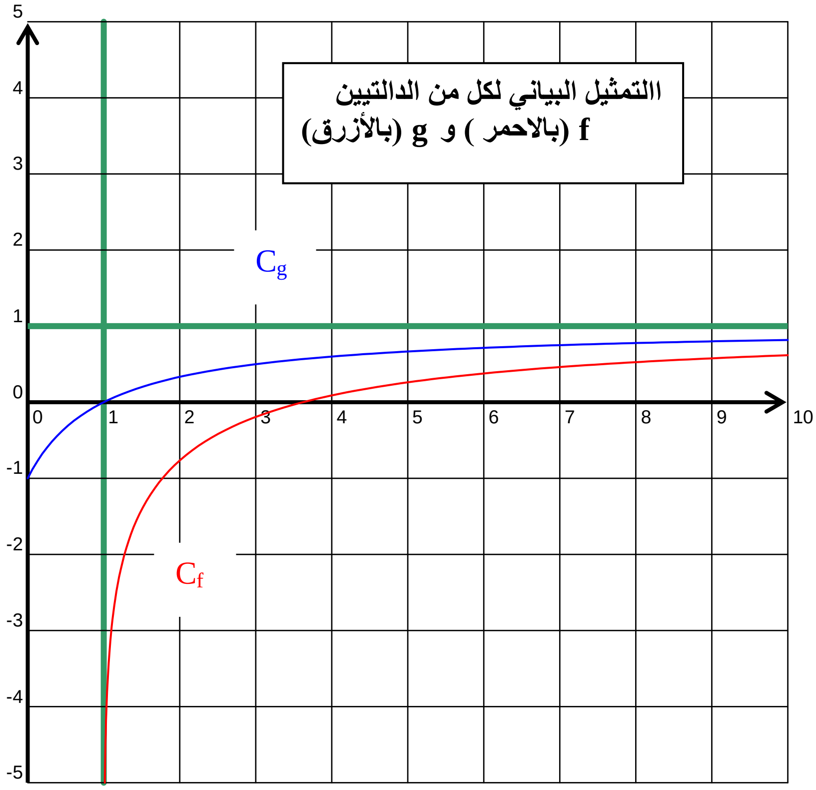
0,75 . الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0, x_0[$ إذن أكبر قيمة

للمساحة هي عندما يكون $x_c = x_0$

تحت إشراف الأستاذ

مهاجر لسطفي

* إنتهى *



مع تحيات الأستاذ
مهاجر لطفي
molotfi2000@yahoo.fr
ثانوية أحمد مربوح سيدي الجيلالي
ولاية تلمسان